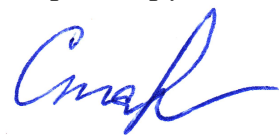


На правах рукописи



Стародубцева Юлия Владимировна

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2014

Работа выполнена в ФГАОУ ВПО “Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина” на кафедре вычислительной математики Института математики и компьютерных наук.

Научный руководитель: Короткий Александр Илларионович, доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты: Алексеев Геннадий Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН Институт прикладной математики Дальневосточного отделения РАН, заведующий лабораторией вычислительной аэрогидродинамики.

Сумин Михаил Иосифович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО “Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского”, заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета.

Ведущая организация: ФГБУН Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск.

Защита состоится 26 ноября 2014 г. в 14:30 на заседании диссертационного совета Д 212.285.25 на базе ФГАОУ ВПО “Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина” по адресу: 620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина 51, зал заседаний диссертационных советов, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВПО “Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина”, <http://dissovet.science.urfu.ru/news2/>

Автореферат разослан «___» _____ 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, доктор физико-математических наук, профессор



Пименов В.Г.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Многие природные и техногенные явления описываются с помощью моделей тепловой конвекции. Важными областями применения таких моделей являются задачи распространения загрязняющих веществ в водоемах и атмосфере, задачи геофизики, медицинской диагностики и другие. Достаточно часто в этих задачах требуется определить параметры модели по имеющимся результатам наблюдений за состояниями модели. Такие задачи относят к классу обратных задач. На практике к подобным задачам приводит, например, исследование процесса распространения загрязнения, который может проходить в ситуации, когда источники загрязняющего вещества расположены в месте, недоступном для прямых измерений, либо требуется восстановить параметры источника, используя дополнительную информацию о состоянии среды.

Для рассматриваемых моделей наиболее часто рассматривают обратные коэффициентные задачи. В работах Г.В. Алексеева, Д.А. Терешко, Р.В. Бризицкого, О.В. Соболевой, И.С. Вахитова^{1, 2, 3, 4}, исследуются обратные коэффициентные задачи для моделей реакции-конвекции-диффузии и моделей тепловой конвекции вязкой жидкости с регулярными граничными условиями, обратная задача сводится к решению соответствующей экстремальной задачи. В работе О.В. Соболевой⁵ теоретически и численно исследуются обратные коэффициентные задачи для моделей реакции-конвекции-диффузии и классической модели конвекции вещества в приближении Обербека–Буссинеска, обратные задачи также сводятся к решению соответствующих экстремальных задач. В работе А.В. Пененко⁶ рассматривается обратная коэффициентная задача теплопроводности, которая сводится к решению соответствующей вариационной задачи.

Реже исследуются обратные граничные задачи для моделей тепловой конвекции. В работах А.И. Короткого и Д.А. Ковтунова^{7, 8} теоретически и численно исследовались прямые и обратные граничные задачи для моделей стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости со смешанными граничными услови-

¹Алексеев Г.В., Терешко Д.А. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 364 с.

²Алексеев Г.В. Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепло-массопереноса // ЖВМиМФ. 2007. Т. 47. № 6. С. 1055 – 1076.

³Алексеев Г.В., Вахитов И.С., Соболева О.В. Оценки устойчивости в задачах идентификации для уравнения конвекции-диффузии-реакции // ЖВМиМФ. 2012. Т. 52. № 12. С. 2190 – 2205.

⁴Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В. Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой жидкости со смешанными граничными условиями // Дальневост. матем. журн. 2003. Т. 4. № 1. С. 108 – 126.

⁵Соболева О.В. Обратные экстремальные задачи для стационарных моделей переноса вещества: дис....канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. Владивосток, 2011. 118 с.

⁶Пененко А.В. О решении обратной коэффициентной задачи теплопроводности методом проекции градиента // Сиб. электрон. матем. изв. 2010. Вып. 7. С. 178–198.

⁷Короткий А.И., Ковтунов Д.А. Реконструкция граничных режимов // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби: Тр. междунар. семинара. 2006. Т. 2. С. 82–91.

⁸Ковтунов Д.А. Моделирование обратных граничных задач стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости: дис....канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Екатеринбург, 2010. 160 с.

ями. В этих работах доказано существование и единственность слабого решения прямой задачи, устойчивость решения прямой задачи по отношению к входным данным и неустойчивость обратной задачи. Для решения обратной граничной задачи применялись вариационный метод и метод квазиобращения.

При решении обратных задач приходится сталкиваться с рядом проблем: решения задачи не существует, оно не единственно или нет непрерывной зависимости от исходных данных. В обратных задачах, как правило, отсутствует непрерывная зависимость решения от входных данных, т. е. они являются некорректными по Адамару. Теоретическое исследование подобных задач оказывается довольно сложным, не смотря на достижения в современной теории некорректных и обратных задач. Поэтому разработка устойчивых численных методов решения таких задач является крайне важной и значимой.

Целью диссертации является теоретический и численный анализ прямой и обратной граничных задач для ряда стационарных моделей тепломассопереноса.

Методы исследования, достоверность и обоснованность результатов. Результаты, представленные в диссертационной работе, получены с применением методов математического моделирования, теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории обратных и некорректных задач, методов вычислительной математики. Достоверность и обоснованность полученных результатов подтверждается соответствующими математическими доказательствами, использованием апробированных общепринятых математических методов и согласованностью результатов, полученных различными численными методами.

В работе получены и **выносятся на защиту** следующие результаты.

1. Доказаны существование и единственность слабого решения прямой задачи, устойчивость решения прямой задачи по отношению к входным данным, неустойчивость обратной задачи с неоднородными и нерегулярными смешанными граничными условиями для модели стационарной реакции-конвекции-диффузии.
2. Для решения обратных граничных задач в моделях стационарной реакции-конвекции-диффузии разработаны вариационный метод, метод квазиобращения, предложены модификации численных алгоритмов методов Ньютона–Канторовича, Ландвебера и Левенберга–Марквардта.
3. Для решения обратных граничных задач в моделях стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости предложены модификации численных алгоритмов методов Ньютона–Канторовича, Ландвебера и Левенберга–Марквардта.
4. Разработаны комплексы программ, реализующие предложенные алгоритмы численного решения обратных граничных задач для рассматриваемых моделей.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми, они обобщают и дополняют результаты отечественных и зарубежных исследований по данной теме.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в том, что разработанные подходы и методы исследования могут быть использованы при исследовании других важных моделей механики сплошной среды. Предложенные

вычислительные алгоритмы и разработанные методы могут быть применены при решении прикладных задач.

Апробация работы. Основные результаты, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались ранее на различных, в том числе международных, научных конференциях и семинарах: на международной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", посвященной памяти В.К. Иванова (Россия, Екатеринбург, 2011 г.); на международной конференции "Обратные и некорректные задачи математической физики", посвященной 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева (Россия, Новосибирск, Академгородок, 2012 г.); на IV международной молодежной научной школе-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректные задач" (Россия, Новосибирск, Академгородок, 2012 г.); на всероссийской школе-конференции молодых исследователей и VI всероссийской конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и механики", посвященной памяти академика А.Ф. Сидорова (Россия, Абрау-Дюрсо, 2012 г.); на XIV международной конференции "Супервычисления и математическое моделирование" (Россия, Саров, 2012 г.); на международной научной конференции "Колмогоровские чтения-VI. Общие проблемы управления и их приложения" (Россия, Тамбов, 2013 г.); а также на семинарах кафедры вычислительной математики ИМКН УрФУ (г. Екатеринбург) и семинаре отдела некорректных задач анализа и приложений ИММ УрО РАН (г. Екатеринбург).

Публикации. По результатам диссертации лично автором и в соавторстве опубликованы 22 работы: 5 работ в российских рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК [1–5]; 15 работ в других журналах и материалах всероссийских и международных конференций [8–22]; 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ в Роспатенте [6, 7].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из списка основных обозначений и соглашений, введения, трех глав, заключения и списка литературы из 107 наименований, содержит 183 рисунка и 24 таблицы.

Краткое содержание работы

Во введении обоснована актуальность работы, сформулированы цели, отмечены научная новизна, теоретическая и практическая ценность работы.

В первой главе рассматриваются прямая и обратная граничные задачи для модели стационарной реакции-конвекции-диффузии.

В некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, содержащей неоднородную сплошную среду, находящуюся под воздействием некоторых внутренних и внешних определяющих состояние среды факторов, рассматривается установившееся (стационарное) распределение температуры (или концентрации какого-либо вещества среды).

Математическая модель распределения температуры (концентрации рассматриваемого вещества среды) в области Ω представляет собой смешанную краевую

задачу для уравнения реакции-конвекции-диффузии^{1,9,10}

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T) - q T - f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = w, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (3)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ — точка пространства \mathbb{R}^m ; $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x}))$ — заданный вектор скорости движения среды, удовлетворяющий условию $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ в области Ω (условие несжимаемости среды) и условию $\mathbf{u} = 0$ на границе Γ области Ω (условие прилипания среды на неподвижной границе Γ); $T = T(\mathbf{x})$ — температура среды (концентрация вещества); $k = k(\mathbf{x})$ — заданный коэффициент теплопроводности (диффузии) среды; $f = f(\mathbf{x})$ — заданная объемная плотность образования или стока тепла (вещества); $q = q(\mathbf{x})$ — заданный коэффициент реакции; $v = v(\mathbf{x})$ и $w = w(\mathbf{x})$ — заданные функции, определенные на частях Γ_1 и Γ_2 границы Γ области Ω соответственно, характеризующие внешние факторы (режимы) взаимодействия среды, находящейся внутри области Ω , с окружающей средой, $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$; \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали в точках границы Γ .

Прямая граничная задача состоит в нахождении распределения температуры (концентрации) T в области Ω в результате решения краевой задачи (1)–(3).

Будем считать, что Ω является ограниченной строго липшицевой областью в \mathbb{R}^m с кусочно-гладкой границей, обладающей некоторой регулярностью^{11,12,13}.

Пусть далее для определенности $k \in C^1(\bar{\Omega})$, $q \in L_\infty(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$, $\mathbf{u} \in \{ \mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega \}$, $v \in L_2(\Gamma_1)$, $w \in L_2(\Gamma_2)$, $0 < \mu_1 \leq k(\mathbf{x}) \leq \mu_2$, $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, $\mu_1 = \operatorname{const} \leq \mu_2 = \operatorname{const}$; $\| \mathbf{u}(\mathbf{x}) \| \leq \mu_3$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mu_3 = \operatorname{const} \geq 0$; $0 \leq q(\mathbf{x}) \leq \mu_4$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mu_4 = \operatorname{const} \geq 0$.

Все рассматриваемые в работе числовые величины и пространства считаются вещественными, измеримость и интегрируемость понимаются по Лебегу^{11,12,13}.

При указанных условиях на параметры краевой задачи (1)–(3), она может не иметь ни классического, ни обобщенного (из пространства $W_2^1(\Omega)$) решения. Введем понятие слабого решения краевой задачи (1)–(3).

Слабым решением краевой задачи (1)–(3) назовем функцию $T \in L_2(\Omega)$, которая для любой функции $g \in \left\{ g \in W_2^2(\Omega) : g = 0 \text{ на } \Gamma_1, \partial g / \partial \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \right\}$ удовлетворяет интегральному равенству

$$\int_{\Omega} T \left(\operatorname{div} (k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) + q g \right) dx = \int_{\Gamma_1} v k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w g d\Gamma - \int_{\Omega} f g dx.$$

⁹Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: ФМ, 1961. 203 с.

¹⁰Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.

¹¹Ладыженская О.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.

¹²Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.

¹³Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 334 с.

Таким образом, прямая граничная задача состоит в нахождении слабого решения краевой задачи (1)–(3).

Для прямой задачи (1)–(3) справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2.1. Для любых $v \in L_2(\Gamma_1)$, $w \in L_2(\Gamma_2)$, $f \in L_2(\Omega)$ краевая задача (1) – (3) имеет единственное слабое решение $T \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющее оценке

$$\|T\|_{L_2(\Omega)} \leq C_1 \|v\|_{L_2(\Gamma_1)} + C_2 \|w\|_{L_2(\Gamma_2)} + C_3 \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad C_i = \text{const} \geq 0.$$

Охарактеризуем с содержательной точки зрения обратную граничную задачу, соответствующую прямой граничной задаче.

Для определенности будем считать, что на части Γ_1 границы задаются и известны температура (концентрация) $T = v$ и тепловой поток (поток вещества)

$$k \partial T / \partial \mathbf{n} = \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1. \quad (4)$$

Модель распределения температуры (концентрации вещества) в области Ω описывается стационарным уравнением реакции-конвекции-диффузии (1).

Обратная граничная задача состоит в нахождении температуры (концентрации) на части Γ_2 границы Γ в результате решения краевой задачи (1), (2), (4).

При указанных условиях на параметры краевой задачи (1), (2), (4), она может не иметь ни классического, ни обобщенного (из пространства $W_2^1(\Omega)$) решения. Введем понятие слабого решения краевой задачи (1), (2), (4).

Слабым решением краевой задачи (1), (2), (4) назовем функцию $T \in L_2(\Omega)$, которая для любой функции $g \in \left\{ g \in W_2^2(\Omega) : g = 0 \text{ на } \Gamma_2, \partial g / \partial \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \right\}$ удовлетворяет интегральному равенству

$$\int_{\Omega} T \left(\text{div} (k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) + q g \right) dx = \int_{\Gamma_1} v k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \varphi g d\Gamma - \int_{\Omega} f g dx.$$

Таким образом, в качестве обратной граничной задачи будет рассматриваться задача о нахождении следа $T|_{\Gamma_2}$ от слабого решения краевой задачи (1), (2), (4).

Замечание 1.3.2. Функция $T \in L_2(\Omega)$, вообще говоря, может не иметь следов $T|_{\Gamma_1} \in L_2(\Gamma_1)$, $T|_{\Gamma_2} \in L_2(\Gamma_2)$ и тем более следов $\partial T / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_1} \in L_2(\Gamma_1)$, $\partial T / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_2} \in L_2(\Gamma_2)$. Отмеченные здесь следы принадлежат более широким пространствам¹⁴ и поэтому можно было бы поставить обратные граничные задачи с использованием этих пространств. Однако практическая и компьютерная реализация методов решения обратных задач стала бы тогда чрезвычайно трудной и громоздкой. Поэтому будем считать, как это иногда делается¹⁵, что параметры краевых задач принадлежат некоторым подпространствам используемых пространств, при привлечении которых соответствующие следы существуют в пространствах L_2 , постановки задач корректны, разрабатываемые методы и алгоритмы осуществимы.

Если ввести в рассмотрение аффинный оператор

$$A : L_2(\Gamma_2) \ni \xi \longrightarrow k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1} \in L_2(\Gamma_1), \quad (5)$$

¹⁴Лионс Ж. - Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 372 с.

¹⁵Латтес Р., Лионс Ж. - Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 280 с.

где T — решение краевой задачи

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T) - qT - f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1; \quad T = \xi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (7)$$

то обратная задача сводится к решению операторного уравнения

$$A\xi = \varphi. \quad (8)$$

Для краевой задачи (1)–(3) справедлива теорема.

Теорема 1.4.1. Если $v_i \rightharpoonup v_0$ слабо в $L_2(\Gamma_1)$, $w_i \rightharpoonup w_0$ слабо в $L_2(\Gamma_2)$, $f_i \rightharpoonup f_0$ слабо в $L_2(\Omega)$, то $T_i = T[v_i, w_i, f_i] \rightarrow T_0 = T[v_0, w_0, f_0]$ сильно в $L_2(\Omega)$ при $i \rightarrow \infty$, где $T = T[v, w, f]$ — слабое решение краевой задачи (1) – (3).

Замечание 1.4.1. Допустим, что Ξ и Θ — некоторые подпространства пространств $L_2(\Gamma_2)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно, \mathcal{T} — оператор решения $\mathcal{T} : \Xi \ni \xi \rightarrow \mathcal{T}\xi = T[\xi] \in \Theta$, где $T[\xi]$ — решение краевой задачи (6), (7), \mathcal{Y} — оператор конормального дифференцирования $\mathcal{Y} : \Theta \ni T \rightarrow \mathcal{Y}T = k \partial T / \partial \mathbf{n} |_{\Gamma_1} \in L_2(\Gamma_1)$. Если один из операторов \mathcal{T} и \mathcal{Y} вполне непрерывен, а другой ограничен, то их произведение (суперпозиция) есть вполне непрерывный оператор¹⁶ и, следовательно, не имеет ограниченного обратного оператора¹⁶.

Замечание 1.1.2. Наряду с поставленной прямой задачей, так же как и при изучении обратных задач и численном моделировании, могут рассматриваться варианты задач, в которых граница Γ разделена на большее конечное число частей, на каждой из которых могут задаваться граничные условия первого, второго или третьего рода. Такие варианты задач изучаются совершенно аналогично и результаты в таких задачах также получаются аналогичными.

Для решения обратной граничной задачи предлагаются вариационный метод и метод квазиобращения, модификации численных алгоритмов методов Ньютона–Канторовича, Ландвебера и Левенберга–Марквардта.

Нахождение неизвестного режима ξ на Γ_2 в обратной задаче (1), (2), (4) можно свести к соответствующей **вариационной задаче**^{1,15,17} следующим образом.

Пусть наблюдаемый тепловой режим $\varphi = k \partial T / \partial \mathbf{n}$ на границе Γ_1 в обратной задаче (1), (2), (4) соответствует некоторому заранее неизвестному тепловому режиму $T = \xi^*$ на границе Γ_2 . Пусть T^* — решение прямой задачи (6), (7) при $\xi = \xi^*$, тогда $k \partial T^* / \partial \mathbf{n} = \varphi$ на Γ_1 . Пусть $L_2(\Gamma_2) \supseteq V$ — некоторое множество допустимых граничных режимов на границе Γ_2 и известно, что $\xi^* \in V$ (можно положить $V = L_2(\Gamma_2)$).

Для граничных режимов $\xi \in V$ рассмотрим функционал качества

$$J_0(\xi) = \int_{\Gamma_1} \left(k \frac{\partial T_\xi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right)^2 d\Gamma,$$

¹⁶Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

¹⁷Пененко В.В. Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1985. 314 с.

где T_ξ — решение прямой задачи (6), (7). Функционал качества должен принимать нулевое значение при $\xi = \xi^*$. Искомый граничный режим ξ^* является минимизирующим элементом в следующей вариационной (экстремальной) задаче:

$$J_0(\xi) \rightarrow \min : \xi \in V.$$

Для придания этой задаче минимизации некоторого запаса устойчивости введем в функционал J_0 стабилизирующую добавку $\alpha \|\xi\|_{L_2(\Gamma_2)}^2$ и рассмотрим следующий функционал:

$$J(\xi) = J_0(\xi) + \alpha \|\xi\|_{L_2(\Gamma_2)}^2, \quad (9)$$

где α — малый положительный параметр.

Таким образом, от решения обратной задачи (1), (2), (4) переходим к решению вариационной (экстремальной) задачи

$$J(\xi) \rightarrow \min : \xi \in V.$$

Для нахождения точек минимума функционала (9) будет использоваться метод сопряженных градиентов Флетчера-Ривса^{18,19}:

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \beta_i d_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad d_i = \begin{cases} -\nabla J(\xi_i; \alpha_i), & i = 0, \\ -\nabla J(\xi_i; \alpha_i) + \gamma_i d_{i-1}, & i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$\gamma_i = \frac{\|\nabla J(\xi_i; \alpha_i)\|_{L_2(\Gamma_2)}^2}{\|\nabla J(\xi_{i-1}; \alpha_{i-1})\|_{L_2(\Gamma_2)}^2}, \quad i = 1, 2, \dots.$$

Для нахождения градиента $\nabla J(\xi_i; \alpha_i)$ выводится сопряженная задача:

$$\operatorname{div}(k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) + q g = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (10)$$

$$g = 2 \left(k \frac{\partial T_\xi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1; \quad g = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (11)$$

Градиент целевого функционала находится по формуле

$$\nabla J = \nabla J(\xi; \alpha) = \left(k \frac{\partial g_\xi}{\partial \mathbf{n}} + 2 \alpha \xi \right) \Big|_{\Gamma_2},$$

где $g = g_\xi$ — решение сопряженной задачи (10), (11).

На каждом шаге итерационного процесса предварительно определяется параметр $\alpha = \alpha_i$. Для этого решается одномерная задача минимизации:

$$J(\xi_i + d_i(\alpha)) \rightarrow \min : \alpha > 0.$$

Шаг спуска β_i (демпфирующий множитель) определялся в результате решения задачи одномерной минимизации: $J(\xi_i + \beta d_i) \rightarrow \min : \beta > 0$.

При численном моделировании, в качестве Ω будет рассматриваться прямоугольная область $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$ с границей

$$\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3 \cup \bar{\Gamma}_4, \quad \Gamma_1 = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < l_1, x_2 = 0\}, \quad (12)$$

¹⁸Floudas Ch.A., Pardalos P.M. Encyclopedia of optimization. New York: Springer, 2009. 4626 p.

¹⁹Nocedal J., Wright S.J. Numerical optimization. New York: Springer, 1999. 664 p.

$$\Gamma_2 = \{ (x_1, x_2) : x_1 = l_1, 0 < x_2 < l_2 \}, \quad (13)$$

$$\Gamma_3 = \{ (x_1, x_2) : 0 < x_1 < l_1, x_2 = l_2 \}, \quad (14)$$

$$\Gamma_4 = \{ (x_1, x_2) : x_1 = 0, 0 < x_2 < l_2 \}. \quad (15)$$

Граница Γ_1 недоступна измерениям, на ней необходимо будет определить граничный режим $T = \xi$. На границах Γ_2 и Γ_4 будут заданы неизменные условия теплоизолированности $k \partial T / \partial \mathbf{n} = 0$. Граница Γ_3 будет доступна измерениям, на ней будут заданы условия $T = 0, k \partial T / \partial \mathbf{n} = \varphi$.

Решались обратные задачи по восстановлению трех граничных режимов.

1. Гладкий режим $\xi^{(1)}(x_1) = \cos(2\pi x_1)$.
2. Непрерывный кусочно-гладкий режим $\xi^{(2)}(x_1) = |\cos(\pi x_1)|$.
3. Разрывный режим $\xi^{(3)}(x_1) = 0.5$ при $x_1 \in [0; 0.1]$; $\xi^{(3)}(x_1) = x_1 + 0.4$ при $x_1 \in [0.1; 0.5]$; $\xi^{(3)}(x_1) = 0.9 - x_1$ при $x_1 \in [0.5; 0.9]$; $\xi^{(3)}(x_1) = 0$ при $x_1 \in [0.9; 1]$.

В Таблице 1 приведены результаты численных экспериментов:

- количество итераций, затраченных на восстановление режима $\xi^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$;
- значение относительной погрешности $\varepsilon^{(j)}$ восстановления режима $\xi^{(j)}$

$$\varepsilon^{(j)} = \|\tilde{\xi}^{(j)}(\cdot) - \xi^{(j)}(\cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)} / \|\xi^{(j)}(\cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)} \quad j = 1, 2, 3,$$

где $\tilde{\xi}^{(j)}$ — результат восстановления граничного режима $\xi^{(j)}$.

Таблица 1.

режим	$\xi^{(1)}$	$\xi^{(2)}$	$\xi^{(3)}$
относительная погрешность, $\varepsilon^{(j)}$	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$9.8 \cdot 10^{-2}$	$1.85 \cdot 10^{-1}$
количество итераций	86	54	500

Далее рассматривается метод решения поставленной обратной задачи (1), (2), (4) на основе **метода квазиобращения**¹⁵. Рассмотрим вспомогательную задачу, включающую в себя регуляризованное уравнение реакции-конвекции-диффузии

$$\operatorname{div} (k \nabla T_\alpha) = (\mathbf{u}, \nabla T_\alpha) - q T_\alpha - f + \alpha \frac{\partial^4 T_\alpha}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (16)$$

при этом для искомой функции T_α граничные условия остаются прежними, то есть остаются условия (2), (4). Ожидается, что рассматриваемая вспомогательная задача (16), (2), (4) будет устойчивой при всех достаточно малых $\alpha > 0$ или будет обладать бóльшим запасом устойчивости по сравнению с исходной задачей, при этом $\xi_\alpha(\mathbf{x}) = T_\alpha(\mathbf{x})|_{\Gamma_2} \approx \xi(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x})|_{\Gamma_2}$.

Параметр α будет выбираться из условия квазиоптимальности^{20,21}.

В Таблице 2 приведены результаты численных экспериментов:

- относительная погрешность $\varepsilon^{(j)}$ восстановления режима $\xi^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$;
- значение параметра α_j при восстановлении режима $\xi^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$.

²⁰Тихонов А.Н., Гласко В.Б. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах // ЖВМиМФ. 1965. Т. 5. № 3. С. 463–473.

²¹Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.

Таблица 2.

режим	$\xi^{(1)}$	$\xi^{(2)}$	$\xi^{(3)}$
относительная погрешность, $\varepsilon^{(j)}$	$7.4 \cdot 10^{-2}$	$8.8 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$
квазиоптимальный параметр, α_j	$1 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$6.5 \cdot 10^{-3}$

Нахождение неизвестного теплового режима ξ на Γ_2 в обратной задаче (1), (2), (4), как установлено выше, можно свести к решению операторного уравнения (8). Для решения рассматриваемого операторного уравнения (8) предлагается модифицировать **метод Ньютона–Канторовича**²² введением параметра регуляризации α_i и демпфирующего множителя β_i :

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \beta_i [A'(\xi_i)]_{\alpha_i}^{-1} (A(\xi_i) - \varphi), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Производная Фреше A' в точке ξ на элементе ζ вычисляется по формуле

$$A'(\xi)\zeta = k \frac{\partial T_\zeta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1},$$

где T_ζ — решение краевой задачи

$$LT_\zeta \equiv \operatorname{div}(k \nabla T_\zeta) - (\mathbf{u}, \nabla T_\zeta) + q T_\zeta = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$T_\zeta = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1; \quad T_\zeta = \zeta, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2.$$

Оператор $[A'(\xi)]_{\alpha}^{-1}$ действует следующим образом

$$[A'(\xi)]_{\alpha}^{-1}(\psi) = T_\alpha \Big|_{\Gamma_2},$$

где T_α — решение краевой задачи

$$LT_\alpha = \alpha \frac{\partial^4 T_\alpha}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$T_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1; \quad k \frac{\partial T_\alpha}{\partial \mathbf{n}} = \psi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1.$$

Параметр α_i выбирается из условия квазиоптимальности^{20,21}. Демпфирующий множитель β_i определяется из решения задачи одномерной минимизации:

$$\|A(\xi_i - \beta [A'(\xi_i)]_{\alpha_i}^{-1} (A(\xi_i) - \varphi)) - \varphi\|_{L_2(\Gamma_2)} \rightarrow \min : \beta > 0.$$

В Таблице 3 приведены результаты численных экспериментов:

- количество итераций, затраченных на восстановление режима $\xi^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$;
- значение относительной погрешности $\varepsilon^{(j)}$ восстановления режима $\xi^{(j)}$.

Таблица 3.

режим	$\xi^{(1)}$	$\xi^{(2)}$	$\xi^{(3)}$
относительная погрешность, $\varepsilon^{(j)}$	$1.83 \cdot 10^{-2}$	$9.4 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-1}$
количество итераций	3	20	9

²²Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Москва–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2006. 210 с.

Далее для решения операторного уравнения (8) модифицируем классический **метод Ландвебера**²³, вводя регуляризующую добавку $\beta_i \xi_i$ и выбирая подходящее значение параметра α_i на каждой итерации:

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \alpha_i A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi) + \beta_i \xi_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Оператор $A'(\xi)^*$ действует следующим образом

$$A'(\xi)^* \zeta = k \frac{\partial g_\zeta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2},$$

где $g = g_\zeta$ удовлетворяет вспомогательной краевой задаче

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) + q g &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ g &= \zeta, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1; \quad g = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \end{aligned}$$

На каждом шаге итерационного процесса предварительно определяется параметр α_i , для этого решается одномерная задача минимизации:

$$\| A(\xi_i - \alpha A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi)) - \varphi \| \rightarrow \min : \alpha > 0.$$

Параметр β_i определялся в результате решения задачи:

$$\| A(\xi_i - \alpha_i A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi) + \beta \xi_i) - \varphi \| \rightarrow \min : \beta > 0.$$

В Таблице 4 приведены результаты численных экспериментов:

- количество итераций, затраченных на восстановление режима $\xi^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$;
- значение относительной погрешности $\varepsilon^{(j)}$ восстановления режима $\xi^{(j)}$.

Таблица 4.

режим	$\xi^{(1)}$	$\xi^{(2)}$	$\xi^{(3)}$
относительная погрешность, $\varepsilon^{(j)}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$	$9.8 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-1}$
количество итераций	3	29	9

И, наконец, для решения операторного уравнения (8) модифицируем **метод Левенберга-Марквардта**²², вводя демпфирующий множитель β_i и выбирая подходящее значение коэффициента α_i на каждой итерации:

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \beta_i [A'(\xi_i)^* A'(\xi_i) + \alpha_i E]^{-1} A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

На каждом шаге итерационного процесса предварительно определяется параметр α_i , для этого решается задача одномерной минимизации:

$$\| A(\xi_i - (B + \alpha E)^{-1} A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi)) - \varphi \| \rightarrow \min : \alpha > 0.$$

Параметр β_i находится в результате решения задачи:

$$\| A(\xi_i - \beta (B + \alpha_i E)^{-1} A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi)) - \varphi \| \rightarrow \min : \beta > 0.$$

В Таблице 5 приведены результаты численных экспериментов:

- количество итераций, затраченных на восстановление режима $\xi^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$;
- значение относительной погрешности $\varepsilon^{(j)}$ восстановления режима $\xi^{(j)}$.

²³Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.

Таблица 5.

режим	$\xi^{(1)}$	$\xi^{(2)}$	$\xi^{(3)}$
относительная погрешность	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$9.9 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-1}$
количество итераций	142	54	515

Во второй главе рассматриваются прямая и обратная граничные задачи для модели стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости. В некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, рассматривается движение высоковязкой несжимаемой теплопроводной ньютоновской жидкости, находящейся в поле силы тяжести под воздействием некоторого внешнего теплового режима. Математическая модель установившегося движения такой жидкости представлена следующей безразмерной краевой задачей в приближении Буссинеска^{24,25,26}

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p - Ra T \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (17)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (18)$$

$$\operatorname{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (19)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (20)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = w, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (21)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ — точка пространства \mathbb{R}^m ; $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x}))$ — вектор скорости движения среды; $p = p(\mathbf{x})$ — давление; Ra — число Рэлея; $T = T(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, — температура среды; $k = k(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, — заданный коэффициент теплопроводности среды; $v = v(\mathbf{x})$ и $w = w(\mathbf{x})$ — заданные функции, определенные на частях Γ_1 и Γ_2 границы Γ области Ω соответственно, характеризующие внешние факторы (режимы) взаимодействия среды, находящейся внутри области Ω , с окружающей средой, $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$; \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали в точках границы Γ области Ω ; \mathbf{e}_m — орт оси x_m .

Область Ω удовлетворяет условиям из первой главы.

Прямая граничная задача состоит в нахождении распределения температуры T и скорости движения среды \mathbf{u} в области Ω в результате решения краевой задачи (17)–(21).

Пусть далее для определенности $k \in C^1(\bar{\Omega})$, $0 < \mu_1 \leq k(\mathbf{x}) \leq \mu_2$, $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, $\mu_1 = \text{const} \leq \mu_2 = \text{const}$; $v \in L_2(\Gamma_1)$, $w \in L_2(\Gamma_2)$.

При указанных условиях на параметры краевой задачи (17)–(21), она может не иметь ни классического, ни обобщенного решения²⁴.

Слабым решением краевой задачи (17)–(21) назовем пару функций $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$, которая для любой пары $(\mathbf{f}, g) \in \mathbf{H}(\Omega) \times G_2(\Omega)$ удовлетворяет интегральным равенствам

²⁴Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 400 с.

²⁵Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. New York: Dover, 1981. 654 p.

²⁶Алексеев Г.В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Научный мир, 2010. 411с.

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx = \text{Ra} \int_{\Omega} T(\mathbf{e}_m, \mathbf{f}) dx, \quad (22)$$

$$\int_{\Omega} T \left(\text{div}(k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) \right) dx = \int_{\Gamma_1} v k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w g d\Gamma, \quad (23)$$

где $\mathbf{H}(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma, \text{ div } \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega \right\}$.

Таким образом, прямая граничная задача состоит в нахождении слабого решения краевой задачи (17)–(21).

Замечание 2.1.1. Давление p исключается из равенств (22), (23) в силу того, что компонента \mathbf{u} решения ищется в классе соленоидальных функций равных нулю на границе Γ , т. е. в классе $\mathbf{H}(\Omega)$, такому же классу принадлежит и функция $\mathbf{f} \in \mathbf{H}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\nabla p, \mathbf{f}) dx = 0 \quad \forall p \in W_2^1(\Omega), \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}(\Omega).$$

Если найдено слабое решение $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$ краевой задачи (17)–(21), то ²⁴ существует такая функция $p \in L_2(\Omega)$, что пара (\mathbf{u}, p) удовлетворяет уравнениям (17), (18) в смысле теории распределений. Если слабое решение (\mathbf{u}, T) обладает достаточной гладкостью, то скалярная функция p может быть найдена с помощью интегрирования из уравнения (17). Функция p определяется однозначно с точностью до аддитивной постоянной.

Замечание 2.1.3. Наряду с поставленной прямой задачей, так же как и при изучении обратных задач и численном моделировании, могут рассматриваться варианты задач, в которых граница Γ разделена на большее конечное число частей, на каждой из которых задается граничное условие первого, второго или третьего рода. Такие варианты задач изучаются совершенно аналогично и результаты в таких задачах также получаются аналогичными.

Слабая разрешимость, единственность и устойчивость краевой задачи (17)–(21) доказаны в работах^{27, 28, 29}.

Сформулируем соответствующую обратную граничную задачу.

Пусть на части Γ_1 границы задаются и известны температура $T = v$ и тепловой поток

$$k \partial T / \partial \mathbf{n} = \varphi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1. \quad (24)$$

Обратная граничная задача состоит в нахождении температуры $T|_{\Gamma_2}$ на части Γ_2 границы Γ в результате решения краевой задачи (17)–(20), (24).

²⁷Короткий А.И., Ковтунов Д.А. О разрешимости стационарных задач естественной тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14. № 1. С. 61–73.

²⁸Короткий А.И. Разрешимость в слабом смысле одной краевой задачи, описывающей тепловую конвекцию // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 2. С. 121–132.

²⁹Ковтунов Д.А. Разрешимость стационарной задачи тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 1. С. 74–85.

Будем считать, что все величины и параметры в обратной задаче удовлетворяют тем же условиям, каким удовлетворяли эти величины и параметры в прямой задаче, и пусть $\varphi \in L_2(\Gamma_1)$.

Слабым решением краевой задачи (17)–(20), (24) назовем всякую пару функций $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$, которая для любой пары $(\mathbf{f}, g) \in \mathbf{H}(\Omega) \times G_3(\Omega)$ удовлетворяет интегральным равенствам

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx = \text{Ra} \int_{\Omega} T \mathbf{e}_m \mathbf{f} dx ,$$

$$\int_{\Omega} T \left(\text{div} (k \nabla g) + (\mathbf{u}, \nabla g) \right) dx = \int_{\Gamma_1} v k \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \varphi g d\Gamma .$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p - \text{Ra} T \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (25)$$

$$\text{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (26)$$

$$\text{div} (k \nabla T) = (\mathbf{u}, \nabla T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (27)$$

$$T = v, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1; \quad T = \xi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (28)$$

Если ввести в рассмотрение нелинейный оператор

$$A : L_2(\Gamma_2) \ni \xi \longrightarrow k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1} \in L_2(\Gamma_1),$$

где T — решение краевой задачи (25)–(28), то обратная задача сводится к решению нелинейного операторного уравнения

$$A \xi = \varphi. \quad (29)$$

Таким образом, обратная граничная задача состоит в нахождении следа $T|_{\Gamma_2}$ от решения краевой задачи (17)–(20), (24) или в решении уравнения (29).

Обратная задача (17)–(20), (24) является, вообще говоря, некорректной⁸. Это следует из вполне непрерывности оператора A .

Для решения рассматриваемого операторного уравнения (29) предлагается модифицировать **метод Ньютона–Канторовича** введением параметра регуляризации α_i и демпфирующего множителя β_i :

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \beta_i [A'(\xi_i)]_{\alpha_i}^{-1} (A(\xi_i) - \varphi), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Производная Фреше A' в точке ξ на элементе ζ вычисляется по формуле

$$A'(\xi) \zeta = k \frac{\partial T_{\zeta}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1},$$

где T_{ζ} — удовлетворяет краевой задаче

$$\Delta \mathbf{u}_{\zeta} = \nabla p_{\zeta} - \text{Ra} T_{\zeta} \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\text{div} \mathbf{u}_{\zeta} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad \mathbf{u}_{\zeta} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

$$L T \equiv \operatorname{div} (k \nabla T_\zeta) - (\mathbf{u}_\xi, \nabla T_\zeta) - (\mathbf{u}_\zeta, \nabla T_\xi) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$T_\zeta = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1; \quad T_\zeta = \zeta, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2.$$

Оператор $[A'(\xi)]_\alpha^{-1}$ действует следующим образом

$$[A'(\xi)]_\alpha^{-1}(\chi) = T_\alpha|_{\Gamma_2},$$

где T_α — решение вспомогательной краевой задачи, в которой модель движения жидкости включает в себя регуляризованное уравнение теплового баланса

$$\Delta \mathbf{u}_\alpha = \nabla p_\alpha - Ra T_\alpha \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad \mathbf{u}_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

$$L T_\alpha = \alpha \frac{\partial^4 T_\alpha}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$T_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1; \quad k \frac{\partial T_\alpha}{\partial \mathbf{n}} = \chi, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1.$$

Параметр α_i выбирается из условия квазиоптимальности^{20,21}. Демпфирующий множитель β_i определяется из решения задачи одномерной минимизации:

$$\|A(\xi_i - \beta [A'(\xi_i)]_{\alpha_i}^{-1}(A(\xi_i) - \varphi)) - \varphi\|_{L_2(\Gamma_2)} \rightarrow \min : \beta > 0.$$

При численном моделировании, в качестве Ω рассматривается прямоугольная область $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$ с границей (12)–(15).

Граница Γ_1 будет недоступна измерениям, на ней необходимо будет определить граничный режим $T = \xi$. На границах Γ_2 и Γ_4 будут заданы неизменные условия теплоизолированности $k \partial T / \partial \mathbf{n} = 0$. Граница Γ_3 будет доступна измерениям, на ней будут заданы условия $T = 0, k \partial T / \partial \mathbf{n} = \varphi$.

Моделировались задачи по восстановлению трех граничных режимов.

1. Гладкий режим $\xi^{(1)}(x_1) = \cos(3\pi x_1)$.
2. Непрерывный кусочно-гладкий режим $\xi^{(2)}(x_1) = 0.1$ при $x_1 \in [0; 0.1) \cup [0.9; 1]$; $\xi^{(2)}(x_1) =$ при $x_1 \in [0.1; 0.5)$; $\xi^{(2)}(x_1) =$ при $x_1 \in [0.5; 0.9)$.
3. Разрывный режим $\xi^{(3)}(x_1) = 0.5$ при $x_1 \in [0; 0.1)$; $\xi^{(3)}(x_1) = x_1 + 0.4$ при $x_1 \in [0.1; 0.5)$; $\xi^{(3)}(x_1) = 0.9 - x_1$ при $x_1 \in [0.5; 0.9)$; $\xi^{(3)}(x_1) = 0$ при $x_1 \in [0.9; 1]$.

В Таблице 6 приведены результаты численных экспериментов.

Таблица 6.

режим	$\xi^{(1)}$	$\xi^{(2)}$	$\xi^{(3)}$
относительная погрешность	$1.1 \cdot 10^{-1}$	$6.2 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-1}$
количество итераций	3	4	28

Далее, для решения операторного уравнения (29) модифицируем классический **метод Ландвебера**, вводя регуляризующую добавку $\beta_i \xi_i$ и выбирая подходящее значение параметра α_i на каждой итерации:

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \alpha_i A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi) + \beta_i \xi_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Оператор $A'(\xi)^*$ действует следующим образом

$$A'(\xi)^* h = k \frac{\partial g_h}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2},$$

где g_h — составляющая решения (z_h, g_h, q_h) краевой задачи

$$\Delta z = \nabla q - \nabla g T_\xi, \quad x \in \Omega,$$

$$\operatorname{div} z = 0, \quad x \in \Omega; \quad z = 0, \quad x \in \Gamma,$$

$$\operatorname{div} (k \nabla g) = -(\mathbf{u}_\xi, \nabla g) - Ra(\mathbf{e}_m, z), \quad x \in \Omega,$$

$$g = h, \quad x \in \Gamma_1; \quad g = 0, \quad x \in \Gamma_2.$$

На каждом шаге итерационного процесса предварительно определяется параметр α_i , для этого решается одномерная задача минимизации:

$$\| A(\xi_i - \alpha A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi)) - \varphi \| \rightarrow \min : \alpha > 0.$$

Параметр β_i определялся в результате решения задачи:

$$\| A(\xi_i - \alpha_i A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi) + \beta \xi_i) - \varphi \| \rightarrow \min : \beta > 0.$$

В Таблице 7 приведены результаты численных экспериментов.

Таблица 7.

режим	$\xi^{(1)}$	$\xi^{(2)}$	$\xi^{(3)}$
относительная погрешность	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$6.4 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-1}$
количество итераций	48	209	236

И, наконец, для решения операторного уравнения (29) модифицируем **метод Левенберга–Марквардта**, вводя демпфирующий множитель β_i и выбирая подходящее значение коэффициента α_i на каждой итерации:

$$\xi_{i+1} = \xi_i - \beta_i [A'(\xi_i)^* A'(\xi_i) + \alpha_i E]^{-1} A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

На каждом шаге итерационного процесса предварительно определяется параметр α_i , для этого решается задача одномерной минимизации:

$$\| A(\xi_i - (B + \alpha E)^{-1} A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi)) - \varphi \| \rightarrow \min : \alpha > 0.$$

Параметр β_i находится в результате решения задачи:

$$\| A(\xi_i - \beta (B + \alpha_i E)^{-1} A'(\xi_i)^* (A(\xi_i) - \varphi)) - \varphi \| \rightarrow \min : \beta > 0.$$

В Таблице 8 приведены результаты численных экспериментов.

Таблица 8.

режим	$\xi^{(1)}$	$\xi^{(2)}$	$\xi^{(3)}$
относительная погрешность	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$6.5 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-1}$
количество итераций	3064	33	1733

В **третьей главе** представлена структура разработанных программных комплексов, приведены описание и примеры входных файлов. Более подробно излагаются алгоритмы решения соответствующих прямых задач, необходимых для реализации предложенных в главах 1 и 2 методов. Описаны структура и примеры выходных файлов, получаемых в результате работы программных комплексов.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертации, дается сравнительная характеристика методов по разным показателям, указываются некоторые направления дальнейшей деятельности.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, определенных ВАК:

1. Короткий, А.И. Реконструкция граничных режимов в модели реакции-конвекции-диффузии / А.И. Короткий, Ю.В. Стародубцева // Вестник Ижевского государственного технического университета. — 2013. — Т. 58. — № 3. — С. 146–149.
2. Стародубцева, Ю.В. Прямые и обратные граничные задачи для моделей реакции-конвекции-диффузии / Ю.В. Стародубцева // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2013. — Т. 18. — вып. 5. — С. 2692–2693.
3. Стародубцева, Ю.В. Численное моделирование обратной граничной задачи для модели вязкой среды модифицированными методами Ньютона–Конторовича, Ландвебера и Левенберга–Марквардта / Ю.В. Стародубцева // Системы управления и информационные технологии. — 2013. — Т. 52. — № 2. — С. 14–18.
4. Стародубцева, Ю.В. Численное решение обратной граничной задачи регуляризованным методом Левенберга–Марквардта / Ю.В. Стародубцева // Научно-технический вестник Поволжья. — 2013. — № 2. — С. 212–215.
5. Короткий, А.И. Прямые и обратные задачи для моделей стационарной реакции-конвекции-диффузии / А.И. Короткий, Ю.В. Стародубцева // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2014. — Т. 20. — №3. — С. 98–113.

Патенты и свидетельства о регистрации программ:

6. Стародубцева Ю.В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014613955 "SRC inverse Boundary Problem". Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 14 апреля 2014 г.
7. Стародубцева Ю.В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014614213 "SHC inverse Boundary Problem". Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 18 апреля 2014 г.

Другие публикации:

8. Стародубцева, Ю.В. Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости / Ю.В. Стародубцева, А.И. Короткий // Материалы конференции "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ", посвященной 50-летию кафедры вычислительной математики и математикомеханического факультета Уральского государственного университета им. А.М. Горького (Екатеринбург, 21–22 апреля 2010 г.). 2010. — С. 95–101.
9. Стародубцева, Ю.В. Восстановление граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости / Ю.В. Стародубцева, А.И. Короткий // Тезисы докладов Всероссийской школы-конференции молодых исследователей и V Всероссийской конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и механики", посвященной памяти академика А.Ф. Сидорова (Россия, Абрау-Дюрсо, 13–18 сентября 2010 г.). — Екатеринбург: УрО РАН. — 2010. — С. 77–78.
10. Короткий, А.И. Численное исследование обратных граничных задач для моделей тепловой конвекции высоковязкой жидкости / А.И. Короткий, Ю.В. Стародубцева // Тезисы докладов Всероссийской конференции по вычислительной математике КВМ-2011 (Россия, Новосибирск, Академгородок, 29 июня – 1 июля 2011 г.). Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2011.
11. Стародубцева, Ю.В. Реконструкция граничных режимов в обратных задачах тепловой конвекции / Ю.В. Стародубцева // Материалы IV Международной конференции "Математика, ее приложения и математическое образование" (МПМО'11) (Россия, Бурятия, Улан-Удэ, 27 июня – 1 июля 2011 г.). — Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ (Восточно-Сибирский государственный технологический университет). — 2011. — Часть 2. — С. 154–157.
12. Стародубцева, Ю.В. Численное моделирование задачи реконструкции граничных режимов / Ю.В. Стародубцева // Тезисы докладов Международной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", посвященной памяти В.К. Иванова (Россия, Екатеринбург, 31 октября – 5 ноября 2011 г.). — Екатеринбург: Издательство Уральского федерального университета. — 2011. — С. 171–172.

13. Стародубцева, Ю.В. Численное моделирование обратной граничной задачи / Ю.В. Стародубцева // Тезисы докладов IV Международной молодежной научной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректные задач"(Россия, Новосибирск, Академгородок, 5–15 августа 2012 г.). — Новосибирск: ИВ-МиМГ СО РАН. — 2012.— С. 115.
14. Стародубцева, Ю.В. Численное моделирование обратной граничной задачи стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости / Ю.В. Стародубцева // Тезисы докладов Международной конференции "Обратные и некорректные задачи математической физики", посвященной 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева (Россия, Новосибирск, Академгородок, 5–12 августа 2012 г.).— Новосибирск: Сибирское научное издательство.— 2012. — С. 239.
15. Стародубцева, Ю.В. Численное моделирование решения обратной граничной задачи тепловой конвекции методами Ландвебера и Левенберга–Марквардта / Ю.В. Стародубцева // Тезисы докладов Всероссийской школы-конференции молодых исследователей и VI Всероссийской конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и механики", посвященной памяти академика А.Ф. Сидорова (Россия, Абрау-Дюрсо, 10–16 сентября 2012 г.)— Екатеринбург: УрО РАН.— 2012.— С. 71–72.
16. Стародубцева, Ю.В. Решение обратной граничной задачи для модели высоковязкой жидкости итерационными методами / Ю.В. Стародубцева // Тезисы докладов XIV Международной конференции "Супервычисления и математическое моделирование"(Россия, Саратов, 1–5 октября 2012 г.).— Саратов: ИПК ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ.— 2012.— С. 146.
17. Стародубцева, Ю.В. Решение обратной граничной задачи для модели высоковязкой жидкости итерационными методами / Ю.В. Стародубцева // Труды XIV Международной конференции "Супервычисления и математическое моделирование"(Россия, Саратов, 1–5 октября 2012 г.) под редакцией Р.М. Шагалиева. —Саратов: ИПК ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ.— 2013.— С. 530–538.
18. Стародубцева, Ю.В. Обратные граничные задачи для модели реакции-конвекции-диффузии / Ю.В. Стародубцева // Тезисы докладов III Всероссийской конференции "Математическое моделирование и вычислительно-информационные технологии в междисциплинарных научных исследованиях"(Россия, Иркутск, 23–26 июня 2013 г.). — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН.— 2013.— С. 54.
19. Стародубцева, Ю.В. Итерационные методы решения обратной граничной задачи для модели тепловой конвекции высоковязкой жидкости / Ю.В. Стародубцева // Тезисы докладов II Российско-Монгольской конференции молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению (Россия–Монголия, Иркутск–Ханка, 25 июня – 1 июля 2013 г.). — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН.— 2013. —С. 56.
20. Стародубцева, Ю.В. Численное моделирование обратной граничной задачи для модели вязкой среды итерационными методами / Ю.В. Стародубцева // Информационные технологии моделирования и управления. — 2013. — № 2 (80).— С. 115–122.
21. Стародубцева, Ю.В. Численное моделирование обратной граничной задачи для модели стационарной реакции-конвекции-диффузии методом квазиобращения / Ю.В. Стародубцева // Тезисы докладов VII Всероссийской конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и механики", посвященной памяти академика А.Ф. Сидорова (Россия, Абрау-Дюрсо, 15–20 сентября 2014 г.). Екатеринбург: УрО РАН. — 2014. — С. 53–54.
22. Короткий, А.И. Восстановление граничных управлений по граничным наблюдениям в системах реакции-конвекции-диффузии / А.И. Короткий, Ю.В. Стародубцева // Тезисы докладов Международной конференции "Динамика систем и процессы управления"(SDCP-2014), посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского (Россия, Екатеринбург, 15–20 сентября 2014 г.). — Екатеринбург: Изд-во УрФУ. — 2014. — С. 113–115.